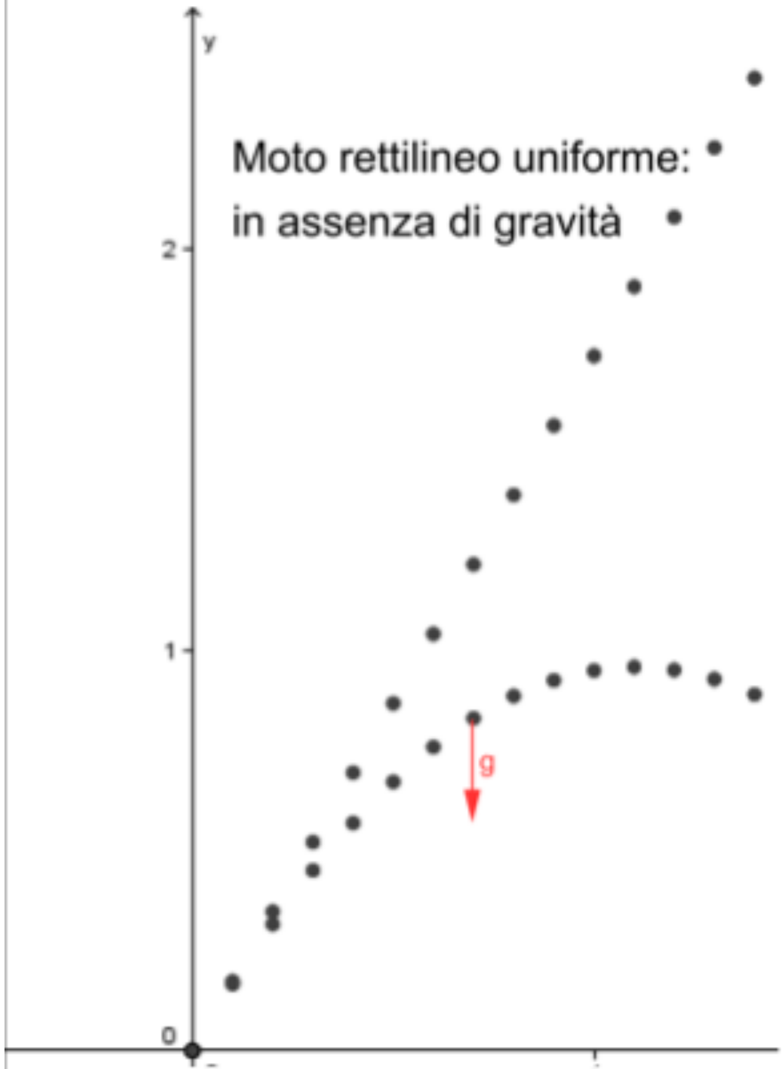
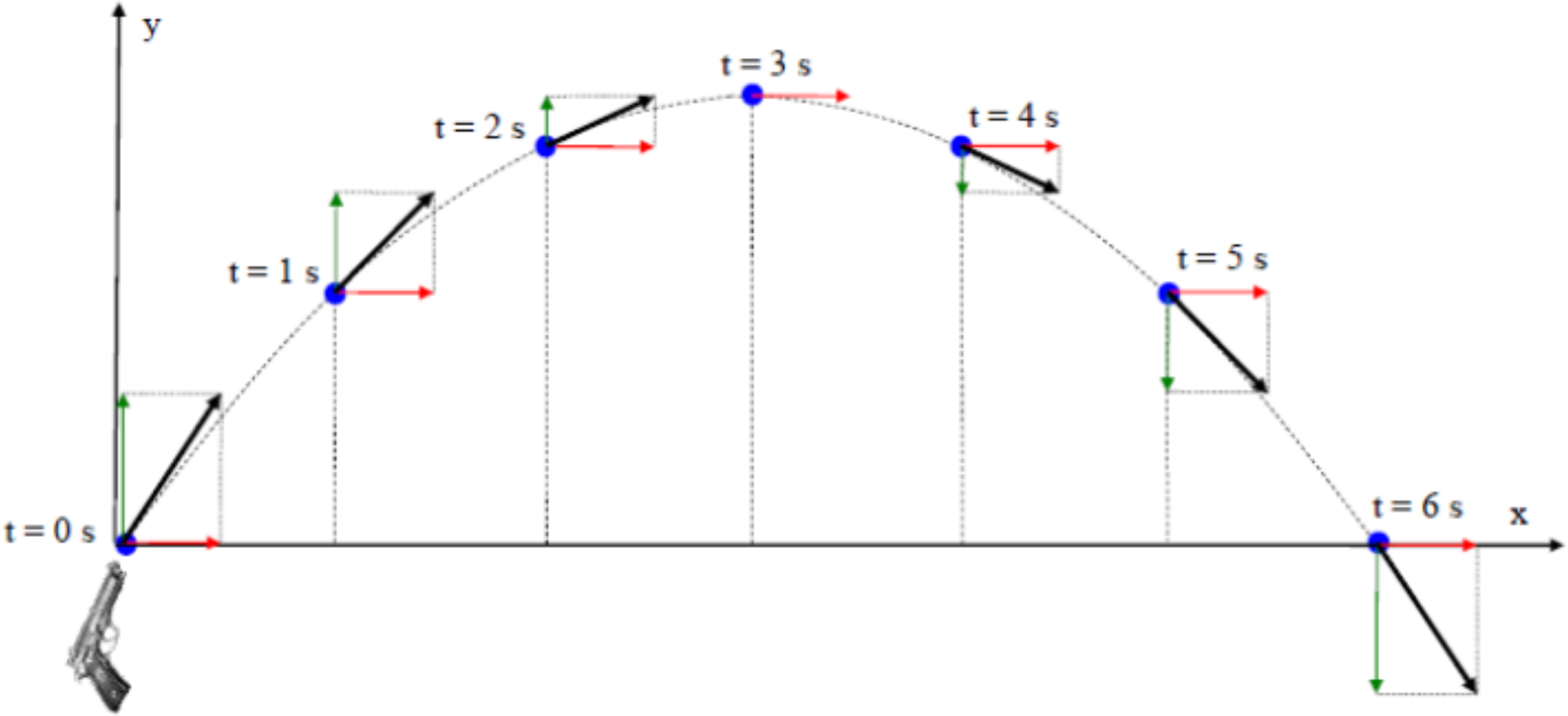
Composizione dei due moti



La velocità

La velocità orizzontale (rosso) rimane costante durante tutto il moto. La velocità verticale (verde), nella fase di ascesa diminuisce dal valore positivo V0y fino a zero in corrispondenza del punto di massima altezza, poi, nella fase di discesa, diventa negativa e cresce in valore assoluto.



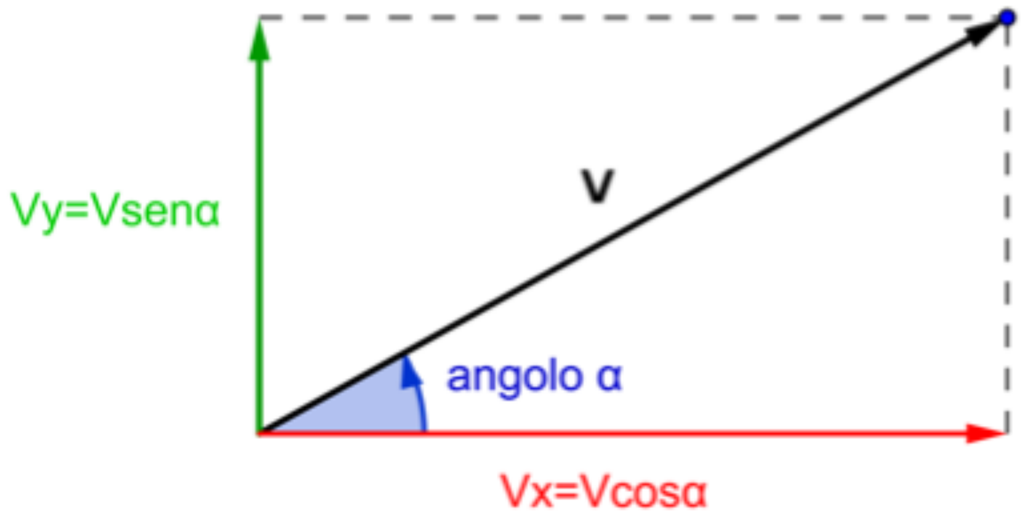
Facciamo i conti

La legge oraria può essere espressa indicando come variano ascissa e ordinata del proiettile in un piano cartesiano in funzione del tempo:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$\text{spazio} = \text{velocità} \cdot \text{tempo}$$

Quindi per determinare le coordinate (x,y) del proiettile nel piano dovremo determinare le componenti orizzontali e verticali della velocità.



Facciamo i conti

Le componenti orizzontale e verticale dell'accelerazione e della velocità risultano:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \approx -9{,}8\,\dfrac{m}{s^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 \cdot \cos\alpha \\ v_y = v_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha - gt \end{cases}$$

dove v_0 e α sono il modulo e l'angolo del vettore velocità iniziale.

La componente verticale della velocità diminuisce nel tempo a causa

dell'accelerazione di gravità di gt (velocità = accelerazione · tempo).

Quando la velocità cambia nel tempo (come avviene per la componente verticale) la velocità media in ogni intervallo t è la media aritmetica tra velocità all'istante iniziale e quella all'istante finale. Poiché la velocità iniziale è nulla e quella finale è gt si ha che la variazione della velocità per effetto della gravità nell'intervallo di tempo t è ½ gt

$$\frac{v_{iniziale} + v_{finale}}{2} = \frac{0 + g \cdot t}{2} = \frac{1}{2} gt$$

La traiettoria

Lo spostamento risulta quindi (spazio = velocità · tempo)

$$\begin{cases} x = v_x \cdot t = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \\ y = v_y \cdot t = v_0 \cdot \mathrm{sen}\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Queste sono le equazioni parametriche della traiettoria, cioè le equazioni che esprimono lo spostamento orizzontale (ascissa del punto) e quello verticale (ordinata del punto) in funzione di uno stesso parametro t, che in questo caso rappresenta il tempo. Ricavando t dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda si può ricavare l'equazione cartesiana della traiettoria del proiettile:

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha} \Rightarrow y = v_0 \cdot \mathrm{sen}\alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha} \right)^2 \Rightarrow$$

$$y = \mathrm{tg}\alpha \cdot x - \frac{g}{2 \cdot (v_0 \cdot \cos\alpha)^2} x^2$$

Analisi del risultato ottenuto

L'equazione ottenuta è quella di una parabola $y=ax^2+bx+c$ con coefficienti

$$a = -\frac{g}{2\cdot(v_0\cdot\cos\alpha)^2} \qquad b = tg\alpha \qquad c = 0$$

Si osserva quindi che:

-Essendo $a<0$ la concavità è rivolta verso il basso

- essendo $c=0$ la parabola passa per l'origine

- la gittata è l'ascissa dell'altro punto di intersezione con l'asse x:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(ax+b) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow O(0,0) \text{ e } A(-\frac{b}{a},0) \Rightarrow \text{gittata} = -\frac{b}{a} =$$

$$= -\frac{tg\alpha}{-\frac{g}{2(v_0\cos\alpha)^2}} = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{2{v_0}^2\cdot\cos^2\alpha}{g} = \frac{2{v_0}^2\cdot sen\alpha\cdot\cos\alpha}{g} = \frac{{v_0}^2\cdot sen2\alpha}{g}$$

Analisi del risultato ottenuto

- l'altezza massima è l'ordinata del vertice della parabola:

$$h = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{tg^2\alpha}{4\left(-\frac{g}{2(v_0 \cdot \cos\alpha)^2}\right)} =$$

$$= -\frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}\left(-\frac{v_0{}^2 \cdot \cos^2\alpha}{2g}\right) = \frac{v_0{}^2 \cdot sen^2\alpha}{2g}$$